CURSO PROPEDÉUTICO 2017

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS

OBJETIVO

Formar estudiantes altamente capacitados, que cuenten con competencias y conocimientos para construir y utilizar técnicas que contribuyan a la aplicación de los aprendizajes de las matemáticas y de esta forma ofrecer alternativas de solución a las dificultades que se presentan en el conocimiento de la asignatura de Álgebra; esta asignatura es la piedra angular del conocimiento matemático, necesario para ingresar al nivel superior en el área de ingeniería, cuya aportación a los fundamentos teóricos y a las aplicaciones de éste conocimiento, es de vital importancia para nuestro entorno.

Es por tanto, que la relevancia de este curso radica en actividades para la promoción de una mejor comprensión de los conceptos básicos y fundamentales determinantes en los primeros cursos de matemáticas en el nivel superior.

INTRODUCCIÓN

Debido a la creciente necesidad de profesionistas competentes en el país y siendo el álgebra el lenguaje de las matemáticas, es de suma importancia que los estudiantes o aspirantes a cursar una ingeniería o una carrera a nivel superior estén preparados en este campo.

Por lo que es necesario contar con un curso que nos permita desarrollar nuestras habilidades para trabajar y manejar el lenguaje científico y técnico que se ve en instituciones de nivel superior.

Un curso propedéutico es una preparación previa a un siguiente nivel académico, es el inicio para que el estudiante conozca el sistema y la metodología utilizada en la institución donde va a ingresar.

Por esta razón se desarrolla un manual que tiene la finalidad de introducir al estudiante al sistema de competencias y capacidades que exige nuestra institución.

Este curso le permitirá al alumno desarrollar habilidades para trabajar y manejar el lenguaje científico y técnico que será utilizado con frecuencia durante sus años de estudio.

CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS

En matemáticas, los números reales incluyen tanto a los números racionales (positivos, negativos y el cero, éste último no se define ni positivo ni negativo) como a los números irracionales; y en otro enfoque, trascendentes y algebraicos. Los irracionales y los trascendentes no se pueden expresar mediante una fracción de dos enteros con denominador no nulo; tienen infinitas cifras decimales aperiódicas, tales como: $\pi, \sqrt{5},$ etc.

- $\mathbb{C}$ Complejos
  - $\mathbb{R}$ Reales
    - $\mathbb{Q}$ Racionales
      - $\mathbb{Z}$ Enteros
        - $\mathbb{N}$ Naturales
          - 1
          - Primos
          - Compuestos
        - 0 Cero
        - Enteros negativos
      - Fraccionarios
        - Fracciones propias
        - Fracciones impropias
    - Irracionales
      - Algebraicos irracionales
      - Trascendentes
  - Imaginarios

Ejercicio 1:

Clasifique los siguientes números

$$8, \quad -5, \quad \sqrt{5}, \quad \pi, \quad \frac{4}{3}, \quad \sqrt{-8}, \quad 0, \quad 14.5, \quad \frac{8}{2}$$

OPERACIONES CON NÚMEROS

1. Suma: Dos números se pueden sumar si y solo si ambos tienen el mismo signo, y su resultado será del mismo signo que los números (cuando un número no tiene signo se denomina positivo)

Ejemplos:

$7 + 4 = 11$ ó $+ 11$

$-8 - 5 = -13$

2. Resta (o diferencia): Dos números se pueden restar si y solo si las dos cantidades tienen diferente signo, y su resultado tendrá el signo del número mayor.

Ejemplos:

$8 - 5 = 3$

$4 - 9 = -5$

$-14 + 6 = -8$

3. Multiplicación (o producto): El resultado de dos números que se multiplican utiliza la ley de los signos para la multiplicación (dos signos iguales al multiplicarse su resultado es positivo y dos signos diferentes al multiplicarse su resultado es negativo); además existen diferentes maneras de representar el signo de multiplicación: ( )( ),[ ][ ],{ }{ } paréntesis, * asterisco, · punto medio, x cruz.

Ley de los signos

$(+)(+) = +$

$(+)(-) = -$

$(-)(+) = -$

$(-)(-) = +$

En aritmética ciertas operaciones con números reales se realizan usando signos y símbolos matemáticos para establecer el orden y la prioridad de las operaciones.

Estas reglas de jerarquización son:

1. Realizar las operaciones que se encuentren dentro de los paréntesis.
2. Resolver las potencias.
3. En caso de tener más de un tipo de paréntesis, primero resolver los paréntesis más internos.
4. Multiplicar los números que están fuera de los paréntesis por el resultado de las operaciones internas de ellos.
5. Realizar las sumas y restas correspondientes.

Ejercicio 2:

a) $(7+8)-(5+9)+4(5-2)$
b) $5[6-(5-12)]-8[8-9(12-8)]$
c) $[5-(8+9)-9]-[8+9(4+5)]$
d) $8\{-9[6+(5-4)]\}+6\{5+9[5+9(5+9)]\}$

OPERACIONES CON FRACCIONES

Una fracción está compuesta por dos números enteros $\frac{a}{b}$, donde a es el NUMERADOR y b el DEMONINADOR.

NOTA*: Una fracción también puede estar expresada de la forma* $a\frac{b}{c}$ *, denominada fracción mixta, por estar compuesta de un número entero y una fracción, por ejemplo* $3\frac{5}{7}$*. Y para convertirla a una fracción simple, multiplicamos el denominador de la fracción por el número entero y se lo sumamos al numerador de la fracción. El resultado obtenido lo dividimos entre el mismo denominador, es decir:*

$$a\frac{b}{c} = \frac{(c)(a) + b}{c}$$

Ejemplo:

$$3\frac{5}{7} = \frac{(7)(3) + 5}{7} = \frac{26}{7}$$

Las fracciones al ser números racionales pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse.

MÉTODOS DE SOLUCIÓN

Suma y resta: Cuando dos fracciones se suman o restan:

1. Se multiplican los denominadores de las fracciones, obteniendo así el denominador del resultado.
2. Se multiplica el denominador obtenido en el paso 1 por cada una de las fracciones.
3. Se suman o restan los resultados obtenidos en el paso 2, dando lugar al numerador del resultado.

Ejemplo:

$$\frac{4}{3} + \frac{8}{5} - \frac{3}{4}$$

1. Se multiplican los denominadores (3)(5)(4) = 60, obteniéndose el denominador del resultado:

$$\frac{4}{3} + \frac{8}{5} - \frac{3}{4} = \frac{\quad}{60}$$

2. Se multiplica el denominador (60) por cada una de las fracciones:

$$(60)\left(\frac{4}{3}\right) + (60)\left(\frac{8}{5}\right) - (60)\left(\frac{3}{4}\right)$$

3. Se suman o restan los resultados obtenidos en el paso 2 (80 + 96 – 45 = 131), dando lugar al numerador del resultado:

$$\frac{4}{3}+\frac{8}{5}-\frac{3}{4}=\frac{131}{60}$$

Multiplicación. Cuando se multiplican dos o más fracciones:

1. Se multiplican todos los numeradores, obteniéndose el numerador del resultado.
2. Se multiplican todos los denominadores, obteniéndose el denominador del resultado.

Ejemplo:

$$\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{8}{5}\right)\left(\frac{3}{7}\right)=\frac{(4)(8)(3)}{(3)(5)(7)}=\frac{96}{105}$$

División. Cuando se dividen dos fracciones:

1. Se multiplican extremos (numerador de la primera fracción por denominador de la segunda fracción), obteniéndose el numerador del resultado.
2. Se multiplican medios (denominador de la primera fracción por numerador de la segunda fracción), obteniéndose el denominador del resultado.

Ejemplo:

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{7}}=\frac{(4)(7)}{(5)(3)}=\frac{28}{15}$$

Ejercicio 3:

a) $\frac{2}{3}+\frac{7}{2}-\frac{2}{5}=$

b) $\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{7}{2}\right)=$

c) $\frac{8}{3} \div \frac{2}{9} =$

d) $\left(\frac{8}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{14}{3}\right) =$

e) $\left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{6}{4}\right) + \left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{6}{7}\right) =$

TÉRMINO ALGEBRAICO

Es una expresión matemática que está compuesta por varios elementos, cada término puede llegar a formar parte de una expresión matemática mayor: binomio, trinomio, polinomio. Por lo tanto, un término algebraico, también se conoce como monomio, ya que el monomio se distingue por tener un solo término, mientras que un polinomio puede estar formado por "n" cantidad de términos.

ELEMENTOS DE UN TÉRMINO ALGEBRAICO

Signos: Es el símbolo que se coloca al inicio de un término algebraico. Los términos que están precedidos del signo + se llaman términos positivos, en tanto los términos que están precedidos del signo – se llaman términos negativos.

Coeficiente: Se llama coeficiente al número que se coloca delante de una cantidad para multiplicarla.

Parte literal: La parte literal está formada por la(s) letra(s) que hay en el término algebraico.

GRADO

El grado de un término con respecto a una letra o literal es el exponente de dicha letra o literal.

Ejemplo:

$+ 5x^2$

El signo es positivo (+)

El coeficiente es 5

La parte literal es x

El grado es 2

OPERACIONES ALGEBRAICAS

SUMA Y RESTA: Para poder sumar o restar dos términos algebraicos, éstos deben tener la misma literal (variable) y que ésta tenga exactamente la misma potencia.

Si dos términos algebraicos tienen la misma literal y el mismo exponente, entonces se suman o se restan sus coeficientes (las literales y los exponentes se quedan tal y como están).

Ejemplos:

$8a^2 + 5a^2$, si se pueden sumar, ya que tienen misma literal con el mismo exponente (a^2).

$$8a^2 + 5a^2 = 13a^2$$

$9a + 3a^2$, no se pueden sumar, ya que aunque tienen la misma literal, ésta tiene diferente exponente en cada uno de los términos (a y a^2).

Ejercicio 4:

a) $-3x + 4y + 8x - y =$
b) $4x + 6y - 8z + 4 - 5z - 5x =$
c) $3xy + 3xy^2 - X^2y + 13xy^2 - 4xy =$
d) $12x - 5y + 3z - (12z + 3x - 4y + 6) =$
e) $-(15x + 4y - z + w) - (-3z + 4x - y) =$
f) $4z^2 + x - 5z^4 - (12x + 4z - z^5)$

g) $-[9+6x-(3x+9y)-6(2x-9z)]-[6(3Z+9X-3Y)+5X]$

h) $[3(9+6X-Y)+6(X-Z)]-3(6+Z)-6(6Z-X)$

i) $-(5X-6Y+9Z-4W+6)-(4W+9Z-3Y-8)$

j) $\left(-\frac{5}{3}X+8Z-\frac{4}{5}Y\right)-\left(-\frac{4}{7}X+\frac{5}{9}Z+\frac{5}{9}Y\right)$

MULTIPLICACIÓN: Al multiplicar dos o más términos algebraicos:

1. Se multiplican los signos de cada término, aplicando la ley de los signos.
2. Se multiplican los coeficientes de cada uno de los términos.
3. Se escribe una sola vez cada una de las literales y sus exponentes serán la suma de los exponentes de cada literal igual.

Ejemplo:

$(3a^2)(-4a^3)$

1. $(+)(-) = -$
2. $(3)(4) = 12$
3. $a^{2+3} = a^5$

$(3a^2)(-4a^2) = -12a^5$

Ejercicio 5:

a) $(10x^2y^3z)(-8x^5y^4z^9) =$

b) $(4xy^5z^{12})(-4x^5y^8z^3) =$

c) $(6x^5y^8z^6)(2x^5y^6z^7) =$

d) $(-9x^8y^5z^{10})(x^6y^8z^9) =$

e) $(4x^3y^5z^{19}a^4b^6)(-8x^4y^{12}a) =$

DIVISIÓN: Al dividir dos términos algebraicos:

1. Se dividen los signos de cada término, aplicando la ley de los signos.
2. Se dividen los coeficientes de cada uno de los términos.
3. Se escribe una sola vez cada una de las literales y sus exponentes serán la resta de los exponentes de cada literal igual (exponentes de la literal del numerador, menos exponentes de la literal del denominador).

Ejemplos:

$$\frac{8a^7}{2a^2}$$

1. (+) / (+) = +
2. (8) / (2) = 4
3. 7 – 2 = 5

$$\frac{8a^7}{2a^2} = 4a^5$$

$$\frac{5a^2}{2a^6}$$

1. (+) / (+) = +
2. (5) / (2) = 5/2
3. 2 – 6 = – 4

$$\frac{5a^2}{3a^6} = \frac{5}{3}a^{-4}$$

Otro tipo de división es cuando tenemos un polinomio entre un monomio

$$\frac{a+b+c+\cdots+z}{q} = \frac{a}{q}+\frac{b}{q}+\frac{c}{q}+\cdots+\frac{z}{q}$$

Quiere decir que cada uno de los términos del numerador se va dividir entre el mismo denominador.

Nota: Tenemos que mencionar que de manera recíproca no se puede realizar esta división, es decir, un mismo numerador no se puede dividir entre cada uno de los términos del denominador. Por ejemplo, si tenemos la división $\frac{a}{b+c}$, no se puede realizar, ya que $\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$.

Ejemplo:

$$\frac{5a^6b^3 + 8a^7b^2}{2a^2} = \frac{5a^6b^3}{2a^2} + \frac{8a^7b^2}{2a^2} = \frac{5}{2}a^4b^3 + 4a^5b^2$$

Ejercicio 6:

a) $\frac{12x^2}{5x^{10}}$

b) $\frac{48x^5y^7z^5}{15x^{10}y^7z^6}$

c) $\frac{12x^6y^6}{24x^{12}y}$

d) $\frac{72x^2y^3z^5a^{15}c}{18x^4ya^{23}b^2}$

e) $\frac{x^4y^3z^8a^8b^5}{xyz^5a^4b^9}$

f) $\frac{1x^{17}z^4a^{12}b^6}{13x^6y^{18}z^9a^3b^{12}}$

g) $\frac{x^9yz^6a^4 - 12xy^9z^8ab + 48x^{10}y^{12}z^3b}{48x^5y^7z^5ab}$

h) $\frac{x^9yz^6a^4 - 2x^4y^{10}z^5a^3b^{12} + 6x^5y^4z^2ab^2}{8x^6y^4z^{12}a^3b^4}$

POTENCIA DE UNA POTENCIA

A una expresión $(a^n)^m$ se le llama potencia de otra potencia, de una expresión algebraica de la misma base. Y se resuelve multiplicando los exponentes:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Nota: Un número al elevarse a una potencia se multiplica a sí mismo el número de veces que indica el exponente.

$$(5)^4 = (5)(5)(5)(5) = 625$$

Un signo negativo elevado a una potencia par su resultado es positivo y un signo negativo elevado a una potencia impar su resultado es negativo.

$$(-)^4 = + \qquad\qquad (-)^7 = -$$

Ejemplos:

$$(-2x^4)^5 = (-)(2)(2)(2)(2)(2)(x)^{4\cdot 5} = -32x^{20}$$

$$(3x^2y^6)^4 = (3)(3)(3)(3)(x^{2*4})(y^{6*4}) = 81x^8y^{24}$$

Ejercicio 7:

a) a) $(-4x^8y^5)^8$
b) b) $(12x^7yz^2)^3$
c) c) $(-x^7y^8)^{20}$
d) d) $(-x^5y^4)^{21}$

POLINOMIOS

OPERACIONES CON POLINOMIOS

MULTIPLICACIÓN DE UN MONOMIO POR UN POLINOMIO

Sea a un monomio y b + c + d un polinomio, entonces el producto de (a) (b + c + d) se obtiene multiplicando el monomio (a) por cada uno de los términos del polinomio (b + c + d).

Ejemplo:

$$(3x^2)(2x^3 - 5x^5y + 3y^3) = (3x^2)(2x^3) - (3x^2)(5x^5y) + (3x^2)(3y^3) = 6x^5 - 15x^7y + 9x^2y^3$$

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

Sean (a + b + c) y (d + e + f) dos polinomios, entonces el producto de ambos se obtiene multiplicando cada término del primer polinomio por cada término del segundo, y se simplifica el resultado sumando términos semejantes, entendiendo por término semejante aquellos que tienen mismas literales con mismos exponentes.

Ejemplo:

$$(3x^2 + 6x^3y - 5y^2)(2x^3 - 5x^5y + 3y^3)$$

$$= (3x^2)(2x^3) + (3x^2)(-5x^5y) + (3x^2)(3y^3) + (6x^3y)(2x^3) + (6x^3y)(-5x^5y) + (6x^3y)(3y^3) + (-5y^2)(2x^3) + (-5y^2)(-5x^5y) + (-5y^2)(3y^3) = 6x^5 - 15x^7y + 9x^2y^3 + 12x^6 - 30x^8y^2 - 15y^5 - 10x^3y^2 + 25x^5y^3 - 15y^5$$

MULTIPLICACIÓN DE BINOMIOS CON TÉRMINO COMÚN (x + a) (x + b)

El producto de dos binomios con término común se obtiene:

1. Se multiplican los términos comunes $(x)(x) = x^2$.
2. Se multiplican la suma de los términos no comunes por el término común $(a + b)(x)$.
3. Se multiplican los términos no comunes$(a)(b)$.
4. Se suman los resultados obtenidos en los pasos 1, 2 y 3:
   $x^2 + (a + b)x + (a)(b)$.

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + (a)(b)$$

Ejemplo:

$$(x+6)(x-2) = x^2 + (6-2)x + (6)(-2) = x^2 + 4x - 12$$

Ejercicio 8:

a) $(x-9)(x+8)$
b) $(8x^{10}-6)(8x^{10}+10)$
c) $(12x^4-11)(12x^4-12)$
d) $(x^9y+1)(x^9y+5)$
e) $(4a^8b^9-4)(4a^8b^9-4)$
f) $(2y+3)(2y-3)$
g) $(10x^4-3)(10x^4+2)$
h) $\left(a^{\frac{4}{5}}+2\right)\left(a^{\frac{4}{5}}+8\right)$
i) $\left(a^{\frac{4}{5}}+2\right)\left(a^{\frac{4}{5}}+1\right)$
j) $\left(4x^{\frac{3}{7}}+6\right)\left(4x^{\frac{3}{7}}-6\right)$

FACTORIZACIÓN

Factor común

Uno de los métodos de factorización que nos sirve para simplificar una expresión algebraica es el factor común, siempre que una expresión algebraica contenga más de dos términos y cada uno de estos contenga una misma variable o coeficientes que sean múltiplos entre sí. Para factorizarlo:

1. Se identifica la variable repetida en cada término de la expresión algebraica y se toma la de menor exponente, o un número entre el cual sean divisibles todos los coeficientes, o ambos, y se convierte en factor común o primer factor.
2. Se divide cada término de la expresión algebraica entre el factor común y los resultados conforman el segundo factor.

Ejemplos:

5b + 20

El factor común es 5.

Se divide cada término de la expresión entre 5:

$$\frac{5b}{5} = b \text{ y } \frac{20}{5} = 4.$$

Con lo que se obtiene 5b + 20 = 5(b + 4)

$$5a^4 + 9a^7 - 4a^3 = a^3(5a + 9a^4 - 4)$$

Ejercicio 9:

Reduce los siguientes polinomios y factoriza.

a) $4z^8 + 8z^8 - 5z^9 + 6z^8 - z + 12z^9$
b) $-x+9x^2-9y^3+8x^2-6y^3+7$
c) $xy^2 - 6x^2y - 5x^2y + 9xy^2 - 7x^2y - 3xy^2$
d) $5 - x + x^3 - x^2 + x^2 - x + 8$
e) $12x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 2x^4 - 5x^5 - x^3$
f) $x^4y^5 - 4xy - 3xy^2 + 5xy^2 - 3x^4y^5 + 4xy - 6xy^2 + 8x^4y^5 - xy$
g) $\frac{3}{5}x - \frac{2}{3}y - \frac{4}{7}x - \frac{3}{2}y$
h) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{2}{5}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{7}{2}x^3 + \frac{1}{10}x^3$
i) $-\frac{1}{10}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{3}{8}x^3 - 5x^3 + \frac{1}{14}x^2 - 4x$
j) $1 + 5x - 8x + 9x - 9x + x - x + 9x$

DIFERENCIA DE CUADRADOS

A una expresión algebraica de la forma $x^2 - a^2$ se le llama diferencia de cuadrados y su factorización es igual al producto de las raíces de cada uno de sus términos. A los factores que se obtienen también se les conoce como binomios conjugados, ya que sus términos son idénticos, salvo que uno de ellos tiene signo contrario. (Nota: la raíz del exponente de una variable es igual a la mitad del mismo de su exponente).

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$$

Ejemplos:

$x^2 - 9$

Se obtiene la raíz cuadrada de x^2, dividiendo el exponente 2 / 2 = 1, por lo tanto, la raíz cuadrada de $x^2 = x$.

Se obtiene la raíz cuadrada de 9, la cual es 3.

Por lo tanto

$$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$$

$$25x^6 - 49 = (5x^3 + 7)(5x^3 - 7)$$

Ejercicio 10:

a) $(6 - a)(6 + a)$
b) $(z^9 - a^5)(z^9 + a^5)$
c) $(12cd - 14ef)(12cd + 14ef)$
d) $(x + 9y^2)(9y^2 - x)$
e) $(1 - xyz)(xyz + 1)$
f) $(4x^3 - 2x)(4x^3 + 2x)$
g) $\left(\frac{7x^4}{4} + \frac{3}{8}y^6\right)\left(\frac{7x^4}{4} - \frac{3}{8}y^6\right)$
h) $\left(\frac{4x^3}{5} + 5y^6\right)\left(\frac{4x^3}{5} - 5y^6\right)$
i) $\left(x^{\frac{2}{3}} - 8y^{\frac{5}{2}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}} + 8y^{\frac{5}{2}}\right)$
j) $\left(x^{\frac{2}{3}} + 8y^{\frac{5}{2}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}} - 8y^{\frac{5}{2}}\right)$

TRINOMIO DE LA FORMA $x^2 + bx + c$

Donde b y c son constantes y para resolverlo debemos encontrar dos números que multiplicados den el valor de c y que esos mismos números sumados o restados (dependiendo de sus signos) den el valor de b, es decir, la factorización se expresa como un producto $(x \pm m)(x \pm n)$ donde m y n son los números que buscamos tal que (m+n) = b y mn = c.

$$x^2 + bx + c = x^2 + (m + n)x + mn = (x + m)(x + n)$$

Ejemplos:

$x^2 + 7x + 10$

El valor de b = 7 y el de c = 10, por lo tanto, requerimos dos números que sumados den 7 y multiplicados den 10. Los números que cumplen ambas condiciones son 2 y 5. Por lo tanto:

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$$

$x^2 - 5x + 6$

El valor de b = – 5 y el de c = 6, por lo tanto, requerimos dos números que sumados den – 5 y multiplicados den 6. Los números que cumplen ambas condiciones son – 3 y – 2 . Por lo tanto:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$$

Ejercicio 11:

Factoriza las siguientes expresiones algebraicas:

$x^2 - 12x + 20$ $\quad$ $x^2 - 6x - 18$ $\quad$ $x^2 - 5x + 6$

$x^2 - 5x - 24$ $\quad$ $x^2 - 17x + 72$ $\quad$ $x^2 - 14x - 240$

$x^2 - x - 12$ $\quad$ $x^2 - 24x + 144$

FACTORIZACIÓN DE UN TRINOMIO DE LA FORMA $ax^2 + bx + c$

Un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ tiene como característica que el coeficiente de x^2 es diferente de uno. Por lo tanto, su factorización es más compleja que la anterior, aunque se basa en un mismo principio. (Es importante recordar las reglas de suma, resta y multiplicación de signos).

Por ejemplo: para factorizar $8x^2 - 10x + 3$

1 Se multiplica el valor de a x c, o sea a = 8 y c = 3 y se obtiene + 24.

2 Se buscan dos números que multiplicados den el valor de a x c = 24 y sumados den el valor de – 10. Los números que cumplen esta condición son – 6 y – 4, ya que:

$$(-6)(-4) = +24 \text{ y } (-6) + (-4) = -10$$

3 Se escribe la primera parte de la respuesta como (8x – 6)(8x – 4).

4 Se trabaja la parte de ax^2, en este caso $8x^2$ y se buscan dos números que multiplicados den 8, para este caso en particular, estos números son 2 y 4, y escribimos:

$$\frac{(8x-6)}{2}\frac{(8x-4)}{4} = (4x-3)(2x-2)$$

Ejercicio 12:

a) $4x^2 - 5x - 9$
b) $7x^2 - x - 6$
c) $8x^2 - 4x - 4$
d) $10x^2 - 15x + 5$
e) $6x^2 - x - 7$
f) $5x^2 - 27x + 10$
g) $3x^2 - 6x - 9$
h) $12x^2 - x - 1$

FÓRMULA GENERAL

Otra manera que podemos utilizar para resolver problemas donde tengamos que encontrar las raíces de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

Es mediante la fórmula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Si queremos encontrar lar raíces de un polinomio, utilizando la fórmula general, primero tenemos que identificar los valores de a, b y c.

Ejemplo:

$2x^2 + 14x + 20$

1. Se identifican a, b y c. a = 2, b = 14 y c = 20.
2. Se sustituyen estos valores en la fórmula general.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-14 \pm \sqrt{(14)^2 - 4(2)(20)}}{2(2)}$$

3. Se resuelve la raíz.

$$x = \frac{-14 \pm 6}{4}$$

4. Se obtienen los dos valores resolviendo

$$x = \frac{-14 + 6}{4} = -2 \quad y \quad x = \frac{-14 - 6}{4} = -5$$

Ejercicio 13:

a) $4x^2 - 5x - 9$
b) $7x^2 - x - 6$
c) $8x^2 - 4x - 4$
d) $10x^2 - 15x + 5$
e) $6x^2 - x - 7$
f) $5x^2 - 27x + 10$
g) $3x^2 - 6x - 9$
h) $12x^2 - x - 1$

BINOMIO AL CUADRADO

Es una expresión algebraica que incluye un par de términos diferentes que se están elevando al cuadrado. Donde el desarrollo de la fórmula es:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplo:

$(4x^5 + 6y^3)^2$

1. Se identifican los valores de a y b. En este caso $a = 4x^5$ y $b = 6y^3$.
2. Se sustituye en la fórmula:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (4x^5)^2 + 2(4x^5)(6y^3) + (6y^3)^2 = 16x^{10} + 48x^5y^3 + 36y^6$$

Ejercicio 14:

a) $(9a^7 + 4b^3)^2$
b) $(3x^5y^2 - 4)^2$
c) $(8x^3 + 7x^2)^2$
d) $(5 - 9y^8)^2$
e) $(6a^5 - 3a)^2$

RECONOCIMIENTO DE EXPRESIONES RACIONALES Y LA DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Una fracción racional se forma por dos o más polinomios en el numerador y el denominador de una fracción algebraica. Por ejemplo:

$$\frac{x^2-100}{x+10} \qquad \frac{x^2+6x+9}{x^2+8x-2}$$

Una forma racional se denota con la expresión $\frac{f(x)}{g(x)}$, donde f(x) es la función del numerador y g(x) la función del denominador, para g(x)$\neq 0$.

Para resolver este tipo de división de expresiones algebraicas:

1. Se factoriza el numerador y el denominador.
2. Se dividen entre sí los términos iguales.
3. Se escribe la fracción en su forma irreducible.

Ejemplos:

$$\frac{2x+6}{x^2+7x+12}$$

1. Se factoriza el numerador utilizando factor común, obteniendo 2 (x + 3).
2. Se factoriza el denominador como un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, obteniendo (x + 3) (x + 4).
3. Se reescribe la fracción factorizada $\frac{2(x+3)}{(x+3)(x+4)}$.
4. Se dividen entre sí los términos iguales $\frac{x+3}{x+3} = 1$. Por lo que nos queda $1 \ \frac{2}{(x+4)}$.

Por lo tanto:

$$\frac{2x+6}{x^2+7x+12} = \frac{2}{x+4}$$

Ejemplo 2:

$$\frac{x^2 - 9}{2x^2 + 10x + 12}$$

1. Se factoriza el numerador utilizando diferencia de cuadrados, obteniendo (x + 3) (x – 3).
2. Se factoriza el denominador como un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, obteniendo (2x + 4) (x + 3).
3. Se reescribe la fracción factorizada $\frac{(x+3)(x-3)}{(2x+4)(x+3)}$.
4. Se dividen entre sí los términos iguales $\frac{x+3}{x+3} = 1$. Por lo que nos queda $1\ \frac{(x-3)}{(2x+4)}$.

Por lo tanto:

$$\frac{x^2 - 9}{2x^2 + 10x + 12} = \frac{(x-3)}{(2x+4)}$$

Ejercicio 15:

a) $\frac{x^2+8x+15}{x^2+3x-10}$
b) $\frac{2x+4}{x^2-4}$
c) $\frac{x^2+3x-4}{x^2+2x-8}$
d) $\frac{3x^2+8x-3}{x^2+x-6}$
e) $\frac{(x^2+5x+6)(2x+8)}{(x^2-4)(x^2+2x-24)}$